КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 1254 УДК 372.8:517.16
Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Вычегжанин Сергей Владимирович,
студент II курса специальности «Прикладная математика и информатика»
ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
sv-postlink@rambler.ru

Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики

Аннотация. *В статье рассматривается доказательство обобщенного неравенства Коши для арифметико-геометрических средних положительных чисел, реализуемое методом прямой и обратной индукции. Приводятся примеры применения данного неравенства при решении задач.*

Ключевые слова: *средние арифметическое и геометрическое, неравенство Коши, задачи повышенного уровня сложности школьного курса математики.*

Напомним читателю известное в тематике средних величин обобщенное неравенство Коши:

$$\left(a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+\ldots+p_n}} \le \frac{p_1a_1+\ldots+p_na_n}{p_1+\ldots+p_n}, \tag{1}$$

где $a_1,\ldots,a_n$ – положительные числа, $p_1,\ldots,p_n$ $(p_k>0,\ k=1,\ldots,n)$ – числа, называемые весами. В (1) равенство достигается только лишь при условии $a_1=\ldots=a_n$.

С. И. Калинин в статье «Неравенство Коши: новое индуктивное доказательство и некоторые применения к решению задач» [1] приводит доказательство данного неравенства подходом Коши, которое основывается на методе прямой и обратной индукции, но реализуется иной техникой. Напомним, что сам Коши свое знаменитое неравенство доказал в ситуации совпадения весов. В виде замечания читателю предлагается применить подход Коши к доказательству весового неравенства (1). Ознакомившись с работой, мы провели осмысление предложенной задачи. Цель настоящей статьи – представить соответствующее доказательство знаменитого неравенства, а также привести некоторые его применения.

Докажем (1) методом прямой и обратной индукции, опираясь на технику Коши.

Установим сначала, что неравенство (1) справедливо для $n=2^m$ $(m\in\mathbf{N})$, т. е. для частного случая, когда n является степенью двойки. Покажем, что имеет место неравенство

$$\left(a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{2^m}^{p_{2^m}}\right)^{\frac{1}{p_1+\ldots+p_{2^m}}} \le \frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^m}a_{2^m}}{p_1+\ldots+p_{2^m}}\quad (m\in\mathbf{N}), \tag{2}$$

при этом равенство возможно только, если $a_1=\ldots=a_{2^m}$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{2^m}^{p_{2^m}} \le \left(\frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^m}a_{2^m}}{p_1+\ldots+p_{2^m}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^m}}. \tag{3}$$

Для доказательства (3) воспользуемся методом полной математической индукции. Для начала установим базу индукции.

Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

При $m=1$ справедливость неравенства

$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\le\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2}{p_1+p_2}\right)^{p_1+p_2} \qquad (4)$$

установлена в работе [1]. Равенство достигается только тогда, когда $a_1=a_2$.

Предположим, что (3) имеет место при $m=k$, т. е. справедливо неравенство

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{2^k}^{p_{2^k}}\le\left(\frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^k}a_{2^k}}{p_1+\ldots+p_{2^k}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^k}}, \qquad (5)$$

где равенство будет достигаться лишь при $a_1=\ldots=a_{2^k}$. Докажем (3) для $m=k+1$.

В силу индукционного предположения наряду с (5) можем записать

$$a_{2^k+1}^{p_{2^k+1}}\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}^{p_{2^{k+1}}}\le\left(\frac{p_{2^k+1}a_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}a_{2^{k+1}}}{p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}\right)^{p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}, \qquad (6)$$

причем равенство в (6) будет достигаться лишь при условии $a_{2^k+1}=\ldots=a_{2^{k+1}}$. Перемножая (5) и (6), получим:

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}^{p_{2^{k+1}}}\le\left(\frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^k}a_{2^k}}{p_1+\ldots+p_{2^k}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^k}}\cdot\left(\frac{p_{2^k+1}a_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}a_{2^{k+1}}}{p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}\right)^{p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}\le$$

$$\le\left(\frac{(p_1+\ldots+p_{2^k})\cdot\dfrac{p_1a_1+\ldots+p_{2^k}a_{2^k}}{p_1+\ldots+p_{2^k}}+(p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}})\cdot\dfrac{p_{2^k+1}a_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}a_{2^{k+1}}}{p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}}{p_1+\ldots+p_{2^k}+p_{2^k+1}+\ldots+p_{2^{k+1}}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^{k+1}}}=$$

$$=\left(\frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^{k+1}}a_{2^{k+1}}}{p_1+\ldots+p_{2^{k+1}}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^{k+1}}}$$

(второе неравенство в приведённых преобразованиях записано на основе базы индукции). Имеем неравенство

$$a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_{2^{k+1}}^{p_{2^{k+1}}}\le\left(\frac{p_1a_1+\ldots+p_{2^{k+1}}a_{2^{k+1}}}{p_1+\ldots+p_{2^{k+1}}}\right)^{p_1+\ldots+p_{2^{k+1}}}, \qquad (7)$$

которое обеспечивает индукционный переход. Равенство в (7) возможно только при условии $a_1=\ldots=a_{2^k}$, $a_{2^k+1}=\ldots=a_{2^{k+1}}$ и $a_1+\ldots+a_{2^k}=a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}$, т. е. когда $a_1=\ldots=a_{2^{k+1}}$. Индукционный переход обоснован полностью. Неравенство (3) доказано. Тем самым доказано и неравенство (2).

Обратную индукцию можно реализовать так же, как в работе [1]. Неравенство (1) методом Коши доказано.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 1254 УДК 372.8:517.16
Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Рассмотрим несколько применений неравенства (1) в задачах. Отметим, что помещаемые ниже задачи 3, 4, 6–9, 12–14 являются развитием задач, приведенных в литературных источниках [2–4].

Задачи на доказательство неравенств

Задача 1 [6, 7]. Доказать для $a,b \ge 0$ неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$.

Решение. Данное неравенство можно доказать несколькими способами. Приведем подходы, используемые авторами цитируемых работ, и подход на основе применения неравенства (1).

Путем подстановки убеждаемся, что заданное неравенство будет справедливым, если хотя бы одно из чисел a или b обращается в нуль. Докажем его справедливость при $a,b>0$.

I способ [8]. Воспользуемся неравенством Юнга [9, с. 216], которое формулируется следующим образом: для любых положительных x, y, α, β, где $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, имеет место неравенство $\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta} \ge xy$. Отметим, что неравенство Юнга является следствием более сильного весового неравенства Коши.

Положим $a=x^5$, $b=y^5$. Тогда левая часть исходного неравенства представится в виде

$$2\sqrt{x^5}+3\sqrt[3]{y^5}=5\cdot\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right).$$

Последнее выражение оценим снизу по неравенству Юнга для величин x, y с весами $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ соответственно:

$$5\cdot\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right)\ge 5xy.$$

Производя обратную подстановку $x=\sqrt[5]{a}$, $y=\sqrt[5]{b}$, получаем то, что и требовалось доказать.

II способ [10]. Используя простое неравенство Коши при $n=5$, можем записать:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\ge 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}=5\sqrt[5]{ab}.$$

III способ. Используя неравенство Коши (1) для взвешенных средних чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ с весами 2 и 3, получаем:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\ge 5\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\right)^{\frac{1}{5}}=5\sqrt[5]{ab}.$$

Последний способ является наиболее экономичным.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 1254 УДК 372.8:517.16
Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Предлагаем читателю по аналогии решить задачу из [11, с. 29].

Задача 2. Доказать неравенство $\frac{x}{y}+2\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\geq 6$, где $x>0$, $y>0$ и $z>0$.

Задача 3. Доказать неравенство $3^{\sqrt[12]{x}}+2\cdot 3^{\sqrt[8]{x}}\geq 3^{1+\sqrt[9]{x}}$ и указать условие достижения в нем равенства.

Решение. Неравенство определено при $x\geq 0$. Подстановкой $x=0$ убеждаемся, что неравенство справедливо. Докажем его справедливость при $x>0$. Для этого дважды воспользуемся неравенством (1):

$$3^{\sqrt[12]{x}}+2\cdot 3^{\sqrt[8]{x}}\geq 3\cdot\left(3^{\sqrt[12]{x}+2\sqrt[8]{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\geq 3\cdot 3^{\left(\sqrt[12]{x}\cdot\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}}}=3^{1+\sqrt[9]{x}}.$$

Равенство достигается лишь при условиях $\sqrt[12]{x}=\sqrt[8]{x}$ и $3^{\sqrt[12]{x}}=3^{\sqrt[8]{x}}$, т. е. при $x=1$.

Задача 4. Доказать, что $\left(a^3+2b^3+c^3\right)\left(h_a{}^3+2h_b{}^3+h_c{}^3\right)\geq 128S^3$, где a, b, c – стороны треугольника; h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, опущенные на данные стороны; S – площадь треугольника.

Решение. Известно, что $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$. Применяя дважды весовое неравенство Коши к выражениям, стоящим в скобках, получим то, что требуется доказать:

$$\left(a^3+2b^3+c^3\right)\left(h_a{}^3+2h_b{}^3+h_c{}^3\right)\geq 4\left(a^3b^6c^3\right)^{\frac{1}{4}}\cdot 4\left(h_a{}^3h_b{}^6h_c{}^3\right)^{\frac{1}{4}}=16\left((ah_a)^3\cdot(bh_b)^6\cdot(ch_c)^3\right)^{\frac{1}{4}}=128S^3.$$

Задача 5. Доказать неравенство $\left(2-\sin^2\alpha\right)\sqrt{2-\cos^2\alpha}\leq 2$. При каких значениях α неравенство становится равенством?

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде:

$$\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)\sqrt{2-\cos^2\alpha}\leq 1.$$

Оценим его левую часть сверху с помощью весового неравенства Коши:

$$\left(\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)\left(2-\cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\right)\leq\left(\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{1}{2}\left(2-\cos^2\alpha\right)}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=1.$$

Отсюда следует справедливость исходного неравенства. Равенство в приведенной оценке имеет место тогда и только тогда, когда $1-\frac{\sin^2\alpha}{2}=2-\cos^2\alpha$. Для того, чтобы получить ответ на второй вопрос задачи, решим последнее уравнение следующим образом: $2-\sin^2\alpha=4-2\left(1-\sin^2\alpha\right)$, $\sin^2\alpha=0$.

Следовательно, равенство имеет место только при $\alpha=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 1254 УДК 372.8:517.16
Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Задачи на решение уравнений

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt{(2x-1)^3}+\frac{3}{\sqrt{2x-1}}=4$.

Решение. Уравнение определено на множестве $(0{,}5;+\infty)$. На данном промежутке левую часть уравнения оценим снизу, используя неравенство (1):

$$1\cdot\sqrt{(2x-1)^3}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\geq 4\left(\sqrt{(2x-1)^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)^3\right)^{\frac{1}{4}}=4.$$

Равенство в приведенной оценке достигается только лишь при условии $\sqrt{(2x-1)^3}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$. Решением последнего уравнения является $x=1$.

Задача 7. Решить уравнение $\sqrt{x^3+x^2+4x+3}+\sqrt{x^3+x+2}=5\sqrt{x}$.

Решение. Уравнение определено при $x\geq 0$. Подстановкой убеждаемся, что $x=0$ корнем не является. При условии $x>0$ оценим подкоренные выражения, стоящие в левой части уравнения, с помощью весового неравенства Коши:

$$x^3+x^2+4x+3\cdot 1\geq 9\left(x^3x^2x^4\cdot 1^3\right)^{\frac{1}{9}}=9x,$$

$$x^3+x+2\cdot 1\geq 4\left(x^3x\cdot 1^2\right)^{\frac{1}{4}}=4x.$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой частей неравенств, будем иметь соотношения:

$$\sqrt{x^3+x^2+4x+3}\geq 3\sqrt{x},$$

$$\sqrt{x^3+x+2}\geq 2\sqrt{x}.$$

Производя сложение двух последних неравенств, получим

$$\sqrt{x^3+x^2+4x+3}+\sqrt{x^3+x+2}\geq 5\sqrt{x},$$

где равенство возможно лишь при условии $x^3=x^2=x=1$. Отсюда нетрудно видеть, что решением является $x=1$.

Задача 8. Решить уравнение $\frac{3}{x^2+1}=\frac{(x+1)^6+2}{(x+1)^2}$.

Решение. Так как $x^2\geq 0$, то левая часть уравнения не превосходит 3. Для оценки правой части воспользуемся весовым неравенством Коши:

$$\frac{(x+1)^6+2}{(x+1)^2}=(x+1)^4+\frac{2}{(x+1)^2}\geq 3,$$

где равенство достигается только лишь при условии $(x+1)^4=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

Следовательно, равенство между левой и правой частями заданного уравнения может иметь место тогда и только тогда, когда обе его части равны 3. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+1}=3, \\ (x+1)^4=\dfrac{1}{(x+1)^2}, \end{cases}$$

находим единственный корень $x=0$.

Задача 9. Решить в натуральных числах уравнение $\dfrac{xy}{z}+2\cdot\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=4$.

Решение. Воспользуемся весовым неравенством Коши:

$$\frac{xy}{z}+2\cdot\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 4\left(\frac{xy}{z}\cdot\left(\frac{xz}{y}\right)^2\cdot\frac{yz}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{xz}\geq 4.$$

Левая часть исходного уравнения будет равна 4 лишь при условиях $\sqrt{xz}=1$ и $\dfrac{xy}{z}=\dfrac{xz}{y}=\dfrac{yz}{x}$, откуда получаем, что $x=y=z=1$.

Задача 10. Решить уравнение $\log_3(11-2x)+2\log_3(x-1)=3^x$.

Решение. Данное уравнение решим двумя способами – графо-аналитическим и с помощью весового неравенства Коши.

I способ. Область допустимых значений уравнения – интервал $(1;5{,}5)$. Исследуем на этом интервале поведение функций $y_1=\log_3(11-2x)+2\log_3(x-1)$ и $y_2=3^x$.

Найдем производную функции y_1:

$$y_1'=\frac{-2}{(11-2x)\cdot\ln 3}+\frac{2}{(x-1)\cdot\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}\left(\frac{-(x-1)+(11-2x)}{(11-2x)(x-1)}\right)=\frac{2}{\ln 3}\left(\frac{12-3x}{(11-2x)(x-1)}\right).$$

Производная y_1' обращается в нуль в точке $x=4$ и при переходе через данную точку меняет знак с «+» на «–». Значит, $x=4$ – точка максимума.

Изобразим графики функций y_1 и y_2 (рис. 1).

Из рисунка видно, что на интервале $(1;5{,}5)$ графики функций не имеют общих точек, а значит, уравнение решений не имеет.

II способ. Заметим, что на множестве $(1;5{,}5)$ правая часть уравнения строго больше 3. Приведем уравнение к следующему виду: $\log_3\left((11-2x)(x-1)^2\right)=3^x$.

Оценим левую часть последнего уравнения сверху при помощи весового неравенства Коши:

$$\log_3\left((11-2x)(x-1)^2\right)\leq\log_3\left(\frac{11-2x+2(x-1)}{3}\right)^3=3.$$

Таким образом, левая часть исходного уравнения на множестве $(1;5{,}5)$ не больше 3, а правая часть больше 3. Следовательно, уравнение решений не имеет.

Вычегжанин С. В. Доказательство обобщенного неравенства Коши методом прямой и обратной индукции и применение его к решению задач элементарной математики // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Март 2012, ART 1254. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1254.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2225-1618.

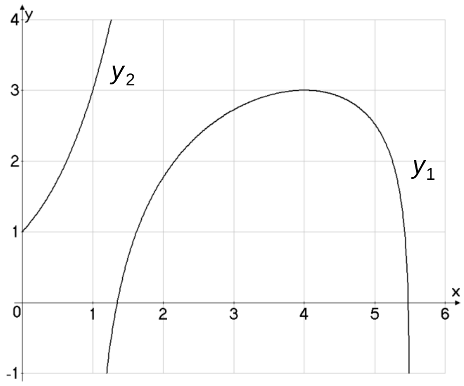

Рис. 1

Сравнивая выше приведенные способы решения, можно сделать вывод, что с помощью специальных неравенств некоторые задачи решаются более просто.

Задача на решение системы уравнений

Задача 11. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2, \\ 27x^2y^4 = 8. \end{cases}$

Решение. Данная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2, \\ 3\sqrt[3]{x^2y^4} = 2. \end{cases}$$

Переменные x и y в нуль не обращаются, иначе второе уравнение системы не имеет смысла. При условии, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, левую часть первого уравнения системы оценим снизу, применяя неравенство (1):

$$x^2 + 2y^2 \geq 3\left(x^2 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x^2y^4} = 2,$$

где равенство будет достигаться лишь при условии $x^2 = y^2$. Тогда исходная система сведется к виду

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2, \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

Решениями последней системы являются $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Составляя всевозможные пары между найденными значениями x и y, получаем четыре решения системы.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Задача 12. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt[4]{x^3 - 3x^4}$ и указать точки, в которых оно достигается.

Решение. Приведем два способа решения задачи.

I способ. Функция определена на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. Исследуем ее поведение на этом отрезке с помощью методов дифференциального исчисления.

Найдем производную функции:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 - 12x^3}{\sqrt[4]{\left(x^3 - 3x^4\right)^3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2(1-4x)}{\sqrt[4]{\left(x^3 - 3x^4\right)^3}}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = \frac{1}{4}$ и при переходе через данную точку меняет знак с «+» на «–». Значит, $x = \frac{1}{4}$ – точка максимума, в которой функция принимает значение $\frac{1}{4}$. Таким образом, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

II способ. Представим функцию в следующем виде: $y = \sqrt[4]{x^3(1-3x)}$.

При $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ оценим ее сверху с помощью неравенства (1):

$$y = \left(x^3(1-3x)\right)^{\frac{1}{4}} \le \frac{3x + 1 - 3x}{4} = \frac{1}{4}.$$

Равенство возможно только лишь при условии $x = 1 - 3x$, т. е. при $x = \frac{1}{4}$. Значит, функция достигает своего наибольшего значения, равного $\frac{1}{4}$, в точке $x = \frac{1}{4}$.

Снова отметим, что использование обобщенного неравенства Коши позволило получить более простое решение задачи.

Задача 13. Найти наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + 4$ и указать точки, в которых оно достигается.

Решение. Представим функцию в следующем виде: $f(x) = 2\left(x^2+1\right) + \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + 2$.

Применяя весовое неравенство Коши, можем записать:

$$2\left(x^2+1\right) + \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + 2 \cdot 1 \ge 5\left(\left(x^2+1\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot 1^2\right)^{\frac{1}{5}} = 5.$$

Равенство в последнем соотношении достигается только лишь при условии $x^2 + 1 = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2} = 1$. Откуда находим $x = 0$. Следовательно, $f_{\min} = f(0) = 5$.

Предлагаем читателю решить данную задачу с помощью нахождения производной функции, как это было сделано в задаче 12.

Задача на геометрический экстремум

Задача 14. Объем цилиндра равен 8π м^3. Найти высоту *H* и диаметр основания *D*, при которых значение периметра прямоугольника в осевом сечении цилиндра будет минимальным.

Решение. Периметр прямоугольника в осевом сечении цилиндра определится по формуле $P = 2(D + H)$. Учитывая, что $D = 2R$, где R – радиус основания цилиндра, последнюю формулу запишем в виде $P = 2(2R + H)$. Оценим величину P снизу с помощью неравенства (1):

$$P = 2 \cdot (2R + H) \geq 2 \cdot 3(R^2H)^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \sqrt[3]{R^2H},$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $R = H$. Объем цилиндра определяется по формуле $V = \pi R^2 H$ и по условию задачи равен 8π м^3. Тогда можем записать:

$$P \geq 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = 12 \text{ м}.$$

Таким образом, значения H и D, при которых периметр прямоугольника будет минимальным, определятся из системы уравнений

$$\begin{cases} R = H, \\ 2(2R + H) = 12. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что $H = 2$ м, $D = 4$ м.

Ссылки на источники

1. Калинин С. И. Неравенство Коши: новое индуктивное доказательство и некоторые применения к решению задач // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Январь 2012, ART 1203. – Киров, 2012. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1203.htm.
2. Там же.
3. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
4. Супрун В. П. Математика для старшеклассников. Задачи повышенной сложности. – М.: Либроком, 2009. – 196 с.
5. Калинин С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу. – Киров: Изд-во ВГГУ, 2002. – 368 с.
6. Горбачев Н. В. Указ. соч.
7. Супрун В. П. Указ. соч.

8, 9. Горбачев Н. В. Указ. соч.

10, 11.Супрун В. П. Указ. соч.

Vychegzhanin Sergey,
second-year student of the Applied Mathematics and Computer Science major of the Vyatka State University of Humanities, Kirov
sv-postlink@rambler.ru

The proof of the generalized Cauchy method of forward and backward induction, and its application to solving problems of elementary mathematics

Abstraction. The article is devoted to a proof of the generalized Cauchy inequality for arithmetical and geometrical mean of positive numbers, realized by the method of forward and backward induction. We give examples of the generalized Cauchy inequality to solve problems.

Keywords: arithmetic and geometric means, the Cauchy inequality, the problem of high levels of school mathematics.

***Рецензент**: Калинин Сергей Иванович, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой математического анализа и методики обучения математике ВятГГУ*